

NISA 制度を考慮したポートフォリオ最適化

松田 昂太郎

京都大学大学院情報学研究科情報学専攻

要旨

NISA とは、日本国内に居住する個人を対象とした少額投資非課税制度の通称である。通常、個人が上場株式等への投資を行って得る譲渡益や配当金は課税対象となり、日本では年間利益の約 20% を税として支払う必要がある。しかし、NISA 制度を利用した投資では、これらの利益はすべて非課税となるため、通常の投資に比べて有利であると考えられる。NISA 制度には、保有限度額をはじめとして様々な制約があり、投資家はこれらの制約を考慮した上で投資決定を行う必要があるが、従来のモデルでは、譲渡益等にかかる税金の精緻な考慮はされていない。本論文では、NISA 制度を利用した非課税運用と通常の課税運用を明確に区別した 1 期間モデルを提案する。凸計画問題として定式化するための緩和についても併せて提案する。また、数値実験を行い、課税の有無を明確に区別しない従来モデルと提案モデルとを比較し、提案モデルの優位性を確認する。

1. 序論

NISA (Nippon Individual Savings Account) とは、日本国内に居住する個人を対象とした少額投資非課税制度の通称である。通常の課税口座を用いた場合、個人が上場株式等への投資を行って得る譲渡益や配当金は課税対象となり、日本では年間利益の約 20% を税として支払う必要がある。しかし、NISA 制度を利用した投資ではこれらの利益はすべて非課税となるため、通常の投資に比べて有利であると考えられる。NISA 制度は 2014 年から開始されているが、2024 年に限度額の引き上げや非課税保有期間の無制限化といった、制度の大幅な拡充が行われた。2024 年 6 月末時点で、開設済み NISA 口座は 2400 万口座を超えるなど「新 NISA」として大きな注目を集めている。本論文では特にことわりのない限り、NISA とは、2024 年から開始された制度体系（新 NISA）を指すものとする。

投資収益に対する税を考慮したポートフォリオ最適化に関する研究は少なく、NISA を念頭においたポートフォリオ最適化の定式化はなされていない。取引コストという観点では、Perold[4]などにより証券売買時の手数料を考慮したモデル化が提案されているが、これらは都度の売買にかかる手数料を念頭に置いたものであり、年間投資利益に対して個人が支払う税を想定したモデル化とはいえない。また、枇々木[14]はある世帯の家計全体に対するフィナンシャル・プランニングという観点から、税を 1 つのファクターとして扱った最適化問題を議論しているが、これは消費支出等も含めたモデル化であり考慮対象が広範に渡ることから、狭義のポートフォリオ最適化とはいえない。このように、課税運用・非課税運用を区別したモデル化はなされておらず、特に、通常の課税口座での投資と NISA 口座での投資とを区別したモデル化も提案されていない。

NISA を考慮したモデル化に際しては、NISA に特有の制約条件も考える必要がある。NISA に特有の主な制約としては、年間投資枠、非課税保有限度額（総枠）などがあるが、これらの詳細は 2.1 節で詳しく述べる。これらの点を踏まえ、本論文では、リターンとリスクに着目した 2 パラメータ・アプローチによる 1 期間ポートフォリオ最適化問題としての定式化を提案する。

現実に忠実なモデル化を行った場合、一部の制約条件式が非凸となることが分かったため、問題の凸性を改善するための緩和についても併せて提案する。

2. 数理モデル化の準備

この節では、NISA 制度を考慮したモデルの提案にあたって必要となる事項について説明する。2.1 節では通常の課税運用に関わる税関連の制度や、NISA 制度の詳細について、2.2 節では一般的なポートフォリオ最適化について説明する。

2.1. 税制・NISA 制度の詳細

2.1.1. 通常の課税運用

通常、上場株式等への投資による利益は課税対象となり、日本では年間利益の約 20% を税として支払う必要がある。主な利益の分類としては、値上がりした資産を売却することによって得られる譲渡益や、配当金・分配金による収益が考えられる。また、値下がりした資産を売却した場合には、差額分の譲渡損が生じることとなる。1 年間の投資に対し、同一人物が保有するすべての課税口座で生じた利益

（譲渡益、配当金・分配金）から、生じた損失（譲渡損）を引くことにより、課税口座での年間の投資利益が計算される。年間の投資利益が正である場合、その 20.315% ¹ が納付すべき税額となる（損益通算）。課税口座には、一般口座と特定口座が存在するが、以下では特定口座を仮定する（この違いは、税額の計算等には影響しない）。譲渡損益を計算するために必要な簿価（取得に要した費用）は、次に示す総平均法に準ずる方法で算出することとなっている。

株式等の譲渡による譲渡所得の金額および雑所得の金額の計算において、同一銘柄の株式等を 2 回以上にわたって購入し、その株式等の一部を譲渡した場合の取得費は、総平均法に準ずる方法によって求めた 1 単位当たりの金額を基に計算します。総平均法に準ずる方法とは、株式等をその種類および銘柄の異なるごとに区分して、その種類等の同じものについて次の算式により計算する方法をいいます。

（算式） $(A+B) \div (C+D) = 1 \text{ 単位当たりの金額}$

A=株式等を最初に購入した時（その後既にその株式等を譲渡している場合には、直前の譲渡の時）の購入価額の総額

B=株式等を最初に購入した後（その後既にその株式等を譲渡している場合には、直前の譲渡の後）から今回の譲渡の時までの購入価額の総額

C=A に係る株式等の総数

D=B に係る株式等の総数

国税庁[9]

特に、同一銘柄を 1 回しか購入していない場合に、その全部または一部を売却する場合は、購入時の単価に基づいて取得費が計算される。また、同一銘柄を 2 回以上にわたって購入している場合でも、その全部を売却する場合は購入に要した費用全額が取得費となる。特定口座を複数保有している場合、簿価の計算は特定口座ごとに行われる。

2.1.2. NISA 制度の詳細

NISA 口座での投資では、譲渡益や配当金・分配金による収益が非課税となる[8]。これは、税務上、NISA 口座内で生じた損益は「ないもの」とみなして計算するためである。したがって、NISA 口座内での年間損益が損失であった場合でも、この損失は「ないもの」とみなされ、特定口座との損益通算などはできない。

NISA 特有の制約として主に「つみたて投資枠・成長投資枠の区別」「年間投資枠」「非課税保有限度額（総枠）」がある。つみたて投資枠・成長投資枠では、投資対象とできる金融商品の種類や購入方法について、それぞれ制約がある。年間投資枠、非課税保有限度額（総枠）は NISA 口座で運用する資産の上限額についての制約である。

つみたて投資枠では長期分散投資に適すると認定された商品のみに投資できるのに対し、成長投資枠ではより幅広い商品に投資できる。一般に、つみたて投資枠として投資可能な商品は、成長投資枠としても投資が可能である。また、つみたて投資枠においては、積立契約に基づく定期継続的な購入（最低

¹ 2025 年 8 月現在の税率

頻度で毎月の場合が多い)が原則であるのに対し、成長投資枠においては購入時期や頻度に関する制約はない。

年間投資枠とは、NISA口座で1年間に購入することのできる資産の上限額であり、簿価(取得時の価格)ベースで360万円である。360万円の内訳は、つみたて投資枠が120万円、成長投資枠が240万円となっている。1年間における新規購入時の取得金額のみに関わる制約のため、期中の資産価格の変動や売却はこの制約に影響しない。

非課税保有限度額(総枠)とは、NISA口座で同時に保有できる資産の上限額であり、簿価ベースで1800万円である。1800万円のうち、成長投資枠として保有できるのは1200万円までとなっている。NISA口座で保有する資産を売却した場合は、その売却分の資産が総枠の中で拘束していた金額が解放される。

総枠の解放は、即時になされるのではなく、売却日の翌年年始に行われる。したがってこの制約は、 X 年期中の t 時点において「 X 年年始の時点で、NISA口座で保有していた資産の簿価総額」と「 X 年年始から t 時点までに新規購入した資産の簿価総額」の合計は1800万円以下でなければならない、という制約となる。

総枠の解放額を算出するために必要な簿価は、課税運用において税額計算のために取得費を算出するのと同じ方法、すなわち、総平均法に準ずる方法で算出することとなっている。簿価の算出は、つみたて投資枠・成長投資枠のそれぞれで個別に行われる。ただし、つみたて投資枠で投資可能な商品のみでポートフォリオを構成する場合には、任意時点での簿価(単価)が各枠で等しくなるようにできるため、この区別を明確に考える必要はない。また、簿価のみに関わる制約のため、すでに保有している資産の価格変動はこの制約に影響しない。

NISAの制約をまとめると、表1のようになる。

表1 NISA制度の概要([8]より抜粋)

	つみたて投資枠	成長投資枠
投資対象商品	長期の積立・分散投資に適した一定の投資信託 (金融庁の基準を満たした投資信託に限定)	上場株式・投資信託等
年間投資枠	120万円	240万円
非課税保有限度額 (総枠)	1800万円	
		うち1200万円まで

2.2. ポートフォリオ最適化モデル

ポートフォリオ選択を最適化問題としてモデル化するとき、考える数理モデルは対象とする投資期間によって1期間モデルと多期間モデルに大別される。いずれのモデルにおいても、定式化に際して離散時間を考えている。本論文では、1期間モデルでのモデル化を提案する。

1 期間モデルは、投資開始時点から投資終了時点までの間の 1 期間を対象としたモデルである。1 期間の資産価格の変動の確率分布を仮定し、投資開始時点での投資配分を（制約を満たすもののうちでリスク関数を最小化するように）決定する。1 期間モデルの場合、リスク関数として主に、（収益率の）分散[3]、下方半分散[3]、絶対偏差[2]、下方部分積率[1]、CVaR (Conditional Value at Risk)[5]などが提案されている[13]。また、リターンに関しては、構築するポートフォリオの期待収益率（平均）が目標値以上になるという制約を課すことが多い。ポートフォリオ最適化として最初に提案されたものは、リターン制約に期待収益率、リスク関数に分散を用いるモデルである。このようなモデルを、平均・分散モデルと呼ぶ。

3. NISA 制度を考慮したポートフォリオ最適化モデル

この節では、特定口座（通常の課税口座）と NISA 口座を明確に区別した、1 期間ポートフォリオ最適化のモデル化を考える。

3.1. モデル化の前提

2.1 節で述べたように、NISA 口座において「つみたて投資枠」での投資は月 1 回以上の頻度で積立を行う積立契約が想定されている。ただし、一部証券会社で提供されている「つみたて投資枠におけるボーナス月設定」を利用することで、実質的に年 1 回の投資と近似することが可能であるため、本論文においては、投資頻度は年 1 回と仮定する。したがって、つみたて投資枠で投資可能な商品のみでポートフォリオを構成する場合には、必ずしもこれら 2 つの枠を区別する必要はない。3 節のモデル化においても、投資対象はつみたて投資枠で投資可能な投資信託のみであるとし、NISA 口座内において 2 つの枠は区別していない。

上で導入した投資頻度、投資対象に関する仮定に加え、モデル化に際して次の 3 点を仮定する。

- 新規投資・リバランスは年末年始に行う。この際、新規投資・リバランスに伴う資産の売却は年末に、資産の購入は年始に行うものとする²。これらは、ほとんど同時点なので、資産価格は同一とする。
- 空売りは行わない。
- 投資期間中の配当金・分配金は考慮しない。

ここでは、2 パラメータ・アプローチによる、NISA を考慮した 1 期間ポートフォリオ最適化のモデル化を考える。ここで、2 パラメータ・アプローチとは、リターン制約 $g(\cdot) \leq 0$ を満たすもののうちで、リスク関数 $f(\cdot)$ を最小にするポートフォリオを求めるというアプローチである。問題の主たる決定変数は、NISA 口座で保有する各リスク資産の投資単位数、特定口座で保有する各リスク資産の投資単位数、ポートフォリオとして保有する現金（無リスク運用）の金額である。

一般の 1 期間ポートフォリオ最適化では、投資後に保有するリスク資産および現金の比率や数量のみ

² NISA 口座で保有する資産の売却による非課税保有限度額（総枠）の解放は、1 年分が翌年年始にまとめて行われる。そのため、売却を年末に、購入を年始に行うことで、NISA 口座での運用を長くする（NISA 枠を時間的に有効に使用する）ことができる。

を決定変数とする（以下、ポートフォリオ変数という）ことが多い。NISA 口座と特定口座を区別するモデルを考える場合、各口座のそれぞれの資産の投資量のみについて変数を割り当てるという拡張が考えられる。この単純な拡張であっても凸計画問題として定式化可能な場合はあるものの、前述の「新規投資・リバランスは年末年始に行う。この際、新規投資・リバランスに伴う資産の売却は年末に、資産の購入は年始に行うものとする」といった仮定を導入する場合などには、この単純な拡張では、税の計算や NISA 制約に関わる式が非凸となり、凸計画問題とならない。

本モデル化においては、各口座での投資量を表すポートフォリオ変数に加えて、簿価を管理する変数（以下、簿価変数という）を新たに設定することで、モデルの凸性に関する問題点を解消する。ここで、新規投資・リバランス前から保有していた資産に関する変数 ϕ_j と新規購入する資産に関する変数 ψ_j の2種類の簿価変数を用いて簿価を管理する、という手法を導入することにより、凸計画問題としての定式化が可能となっている。

特定口座での新規売買についても、NISA 口座の簿価変数と類似の手法を用いることにより、税の支払いに関わる制約式(5)を凸関数の不等式制約として表現することが可能となっている。

3.2. モデルで用いる記号

モデルで用いる記号を定義する。また、金額の単位は1万円とする。

- パラメータ

n : リスク資産の数 (1.国内債券 2.外国債券 3.国内株式 4.外国株式 で $n = 4$ など)。

a_j : 0 時点での新規投資・リバランス直前に、NISA 口座で保有している資産 j の単位数。

b_j : 0 時点での新規投資・リバランス直前に、特定口座で保有している資産 j の単位数。

c : 0 時点での新規投資・リバランス直前に保有している現金の総額。

α_j : 0 時点での新規投資・リバランス直前に、NISA 口座で保有している資産 j の簿価総額。

β_j : 0 時点での新規投資・リバランス直前に、特定口座で保有している資産 j の簿価総額。

ρ_j : 現在の資産 j の単位あたり価格。

p : 現在のポートフォリオ全体の時価評価額。すなわち、 $p = \sum_{j=1}^n \rho_j(a_j + b_j) + c$ 。

q : 新規投資で新たに投資する額。

ℓ_j : 新規投資・リバランス直後の資産 j の最低保有比率。

ℓ' : 新規投資・リバランス直後の現金の最低保有比率。

ξ : 税率 (現行 0.20315)。

- 決定変数

x_j : 新規投資・リバランス直後に、NISA 口座で保有する資産 j の単位数。

y_j : 新規投資・リバランス直後に、特定口座で保有する資産 j の単位数。

z : 新規投資・リバランス直後に保有する現金の総額。

w : 新規投資・リバランス直後 (すなわち、含み益資産の売却に伴って課される税を支払った後) の全資産の時価評価総額。

u_j : 新規投資・リバランスにおいて、特定口座で売却する資産 j の単位数。この定義より、

$$0 \leq u_j \leq b_j .$$

v_j : 新規投資・リバランスにおいて、特定口座で購入する資産 j の単位数. この定義より,

$$0 \leq v_j .$$

ϕ_j : 0 時点での新規投資・リバランス直前に NISA 口座で保有している資産 j について、リバランス直後の簿価総額. この定義より $0 \leq \phi_j \leq \alpha_j$.

ψ_j : 新規に NISA 口座で資産 j を購入する場合の金額 (NISA 買付を行わない場合は 0). この定義より $0 \leq \psi_j$.

- 関数

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: ポートフォリオのリスク関数 (凸関数が望ましい).

$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: ポートフォリオのリターン制約を表す関数 (凸関数が望ましい).

$|x|_+ = \max\{0, x\}$: ランプ関数を $|\cdot|_+$ で表す.

3.3. 定式化

次のような場面において、2 パラメータ・アプローチによるモデルの定式化を考える.

現在 (0 時点), ポートフォリオベクトル $[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c]^\top$ で表される資産を保有している. q 万円の新規元本による投資を行うと同時に、現在保有分をリバランスして、新たなポートフォリオベクトル $[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z]^\top$ で表されるポートフォリオを作る.

(i) 目的関数

目的関数は、リスク関数 $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ であり、これを最小化する.

(ii) 空売り禁止制約

空売りを禁止しているため、ポートフォリオベクトルの各成分は非負の値を取る.

$$0 \leq x_j, \quad 0 \leq y_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad 0 \leq z$$

(iii) 最低組入比率に関する制約

新規投資・リバランス直後のリスク資産 j の時価総額は、 $\rho_j(x_j + y_j)$ である. このとき、ポートフォリオ全体の時価総額は w であり、資産 j の最低組入比率は ℓ_j であるから、最低組入比率の制約は式(1)で表される.

$$\rho_j(x_j + y_j) \geq w \ell_j \quad (j = 1, \dots, n) \tag{1}$$

現金についても同様に、式(2)で表される.

$$z \geq w \ell' \tag{2}$$

(iv) 特定口座の売買変数 u_j, v_j の上下限制約

$$0 \leq u_j \leq b_j, \quad 0 \leq v_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

(v) ポートフォリオ変数 y_j と売買変数 u_j, v_j の関係式

定義より、特定口座で新規投資・リバランス直前に保有している資産 j は b_j 単位であり、新規投資・リバランスで u_j 単位を売却、 v_j 単位を購入した結果、新規投資・リバランス直後に資産 j を y_j 単位保有していることとなる。よって、式(3)が成り立つ。

$$y_j = b_j - u_j + v_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3)$$

(vi) 新規投資・リバランス直後のポートフォリオの総額に関する制約

新規投資・リバランス直後のポートフォリオの時価総額 w は、新規投資・リバランス直前のポートフォリオの時価総額と新規投資元本の合計額 $p + q$ から、特定口座で保有する含み益資産を売却する場合に支払う税額を引いた金額でなければならない。ここで、特定口座で保有する資産 j の売却単位数は u_j である。また、特定口座で保有する資産 j の 1 単位あたりの含み損益は、 $\rho_j - (\beta_j / b_j)$ で表される。よって、特定口座で保有する資産 j を売却する場合、資産 j に起因する実現損益は $u_j \{\rho_j - (\beta_j / b_j)\}$ となる。同一年に発生したすべての資産売却について、実現損益の合計が正となる場合のみ、その実現損益の合計額に税率 ξ を乗じた金額が課税される。以上をまとめると、資産売却に伴って支払う税額は

$$\xi \left| \sum_{j=1}^n u_j \left\{ \rho_j - \left(\frac{\beta_j}{b_j} \right) \right\} \right|_+$$

で表される。よって、新規投資・リバランス直後のポートフォリオの時価総額 w は、式(4)を満たすこととなる。

$$w = p + q - \xi \left| \sum_{j=1}^n u_j \left\{ \rho_j - \left(\frac{\beta_j}{b_j} \right) \right\} \right|_+ \quad (4)$$

しかし、式(4)の右辺第 3 項はアフィン関数ではないため、式(4)をそのまま等式制約とすると、この最適化問題は凸計画問題とはならない。そこで、制約の意味解釈を拡大し、

新規投資・リバランス直後のポートフォリオの時価総額 w は、新規投資・リバランス直前のポートフォリオの時価総額と新規投資元本の合計額 $p + q$ から、特定口座で保有する含み益資産を売却する場合に支払う税額を引いた金額「以下」でなければならない。

とする緩和を考える。この緩和を導入すると、制約は

$$w \leq p + q - \xi \left| \sum_{j=1}^n u_j \left\{ \rho_j - \left(\frac{\beta_j}{b_j} \right) \right\} \right|_+ \quad (5)$$

となり、実行可能領域の凸性が保たれる。ここで、式(5)は、新たな変数 ν を導入し、

$$w \leq p + q - \xi \nu, \quad 0 \leq \nu, \quad \sum_{j=1}^n u_j \left\{ \rho_j - \left(\frac{\beta_j}{b_j} \right) \right\} \leq \nu \quad (6)$$

と書き換えることで 1 次式での等価な表現が可能となる³。

³ この変形を行うことによって、本モデルのすべての制約式は 1 次となる。

なお、式(5)の不等号において等号が成立しない場合、余剰金が生じることとなるが、この余剰金は現金として保有することとする。

(vii) ポートフォリオ変数 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z$ と w の関係

w は新規投資・リバランス直後のポートフォリオの時価総額であるから、式(7)を満たす。

$$\sum_{j=1}^n \rho_j (x_j + y_j) + z = w \quad (7)$$

(viii) NISA 口座の簿価変数 ϕ_j, ψ_j の上下限制約

$$0 \leq \phi_j \leq \alpha_j, \quad 0 \leq \psi_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

(ix) NISA の非課税保有限度額（総枠）に関する制約

新規投資・リバランス直後に NISA 口座で保有する資産の簿価総額は、1800 万円を超えてはならない。新規投資・リバランス直後に NISA 口座で保有する資産 j の簿価は、 $\phi_j + \psi_j$ であるから、NISA 口座全体では

$$\sum_{j=1}^n (\phi_j + \psi_j) \leq 1800$$

を満たさなければならない。

(x) NISA の年間投資枠に関する制約

NISA 口座における年間の新規投資は 360 万円（簿価ベース）を超えてはならないから、

$$\sum_{j=1}^n \psi_j \leq 360$$

を満たさなければならない。

(xi) ポートフォリオ変数 x_j と簿価変数 ϕ_j, ψ_j の関係式

新規投資・リバランス直前に NISA 口座で保有していた分の資産 j の時価総額は、リバランスの結果、 ϕ_j / α_j 倍になる。よって、当該分の資産 j について、新規投資・リバランス直後の時価総額は $\rho_j \alpha_j \phi_j / \alpha_j$ となる。また、新規に NISA 口座で購入する資産 j の金額は ψ_j である。よって、新規投資・リバランス直後に NISA 口座で保有する資産 j の時価総額は、 $\rho_j \alpha_j \phi_j / \alpha_j + \psi_j$ となる。一方、新規投資・リバランス直後に NISA 口座で保有する資産 j の単位数は x_j であることから、式(8)の関係を得る。

$$\rho_j x_j = \rho_j \alpha_j \frac{\phi_j}{\alpha_j} + \psi_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (8)$$

(xii) リターンに関する制約

この問題においてリターン制約は $g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ を用いて式(9)のようになる.

$$g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \leq 0 \quad (9)$$

以上の (i) ~ (xii) をまとめると、最適化問題は次のように記述される.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \\ & \text{subject to} && \\ & && 0 \leq x_j, \quad 0 \leq y_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad 0 \leq z \\ & && \rho_j(x_j + y_j) \geq w \ell_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad z \geq w \ell' \\ & && 0 \leq u_j \leq b_j, \quad 0 \leq v_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ & && y_j = b_j - u_j + v_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ & && w \leq p + q - \xi \left| \sum_{j=1}^n u_j \left\{ \rho_j - \left(\frac{\beta_j}{b_j} \right) \right\} \right|_+ \\ & && \sum_{j=1}^n \rho_j(x_j + y_j) + z = w \\ & && 0 \leq \phi_j \leq \alpha_j, \quad 0 \leq \psi_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ & && \sum_{j=1}^n (\phi_j + \psi_j) \leq 1800 \\ & && \sum_{j=1}^n \psi_j \leq 360 \\ & && \rho_j x_j = \rho_j a_j \frac{\phi_j}{\alpha_j} + \psi_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ & && g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \leq 0 \end{aligned}$$

4. 数値実験

この節では、3節で提案した1期間モデルを用いて、積立投資シミュレーションにより、従来モデルと提案モデルを比較する実験を行う。4.1節では、シミュレーション等の実験方法について説明する。4.2節では、実験結果を示す。4.3節では、実験結果について考察する。

4.1. 実験方法

4.1.1. 資産価格変動のシミュレーション

シミュレーションによるマーケットデータの生成の具体的な手順は次の通りである。資産価格および無リスク金利は次の確率微分方程式(10), (11)で表されるモデルに従うとする[6].

$$d\rho_{j,t} = \rho_{j,t}(\bar{\mu}_j dt + \sigma_j dW_{j,t}) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (10)$$

$$dr_t = r_t(\bar{\mu}_0 + \sigma_0 dW_{0,t}) \quad (11)$$

ここで、 $\bar{\mu}_j$ は資産 j の収益率 μ_j の期待値、 $\bar{\mu}_0$ は無リスク運用の収益率 μ_0 の期待値、 σ_j は資産 j の収益率 μ_j の標準偏差、 σ_0 は無リスク運用の収益率 μ_0 の標準偏差、 W_j ($j = 0, \dots, n$) は

$$d\langle W_j, W_k \rangle = \text{Corr} [\mu_j, \mu_k] dt \quad (j = 0, \dots, n; k = 0, \dots, n)$$

で表される資産間の相関関係を満たす Wiener 過程である ($\langle \cdot \rangle$ は cross-variation を表す)。

投資対象とする資産は、1.国内債券、2.外国債券、3.国内株式、4.外国株式、0.現金（無リスク運用）である。すなわち、3節のモデルにおいて $n = 4$ の場合である。上のシミュレーションの前提となる、期待値（平均）や標準偏差といった統計量を推計するためのデータとして、国内外債券、国内外株式それぞれの指数連動型投資信託（為替ヘッジなし・分配金なし）⁴の過去 20 年の基準価額データ、および銀行普通預金金利の過去 20 年のデータを用いる⁵。投資信託基準価額のデータは、SBI 証券[7]から取得した日次データをもとに作成した年次データを用いた。銀行普通預金金利のデータは、日本銀行[10,11,12]から取得した月次データをもとに作成した年次データを用いた。

4節の実験は、すべて MATLAB R2024b を用いて行った。式(10), (11)の資産価格変動モデルに基づくシミュレーションの実行には、MATLAB Financial Toolbox の simulate メソッドを用いた。また、4節の実験において最適化問題（4.1.2節で定めるリスク関数およびリターン制約を用いる場合、2次計画問題となる）を解く際のソルバーは、MATLAB Optimization Toolbox の quadprog を用いた。

4.1.2. 積立投資のシミュレーション

この実験では、シミュレーションで生成したマーケットデータに対して、従来モデルおよび提案モデルを用いた積立投資シミュレーションを行い、NISA 口座と特定口座を区別する提案モデルと、これらの区別を行わない従来モデルについて、最終資産総額や平均支払い税額などの観点で比較する。従来モデルとしては、一般的な平均・分散モデル[3]を期間ごとに繰り返し用いる方法を考える。資産 j, k の収益率の共分散を $\sigma_{j,k}$ 、ポートフォリオベクトルを $[x_1, \dots, x_n, z]^T$ とかく。ここで、 x_j, z はそれぞれリスク資産 j 、現金がポートフォリオの総額に占める比率である。平均・分散モデルのリスク関数は

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sigma_{j,k} x_j x_k$$

となる⁶。また、 $\bar{\mu}_j$ ($j = 1, \dots, n$)を資産 j の 1 期間収益率の期待値、 r_0 を現在の無リスク金利、 r_E を目標運用利回りとする、リターン制約は

$$\sum_{j=1}^n \bar{\mu}_j x_j + r_0 z \geq r_E$$

⁴ 用いた投資信託の銘柄は次の通りである。

- 1.国内債券：三井住友DS－三井住友・日本債券インデックス・ファンド
- 2.外国債券：三井住友DS－三井住友・DC外国債券インデックスファンド
- 3.国内株式：大和－トピックス・インデックスファンド
- 4.外国株式：インベスコ－インベスコ MSC I コクサイ・インデックス・ファンド

⁵ いずれも、2004 年 11 月から 2024 年 11 月のデータを用いた。日次・月次データから年次データを作成する際は、11 月第 1 営業日を基準としている。

⁶ 平均・分散モデル[3]では、ポートフォリオベクトルの各成分は各資産の比率としている。課税口座、非課税口座の区別をしない場合、売却に伴う支払い税額を計算できないため、本実験においても従来モデルの決定変数は「比率」としている。

で表される。なお、従来モデルでは NISA 口座での投資と特定口座での投資を区別できない。そこで、本実験においては、NISA 口座での購入を優先するとする。すなわち、NISA 枠に空きがある場合は NISA 口座で購入を行い、NISA 枠がすべて使用済みの状況では特定口座で購入を行う。（従来モデルは、数理モデルにおいて NISA 口座と特定口座を区別しないだけで、投資に際して NISA を利用しないということではない。）

提案モデルとしては、3 節で定式化した 1 期間モデルを期間ごとに繰り返し用いる方法を考える。 $\bar{\mu}_j$, $\bar{\mu}_j'$ をそれぞれ、非課税運用、課税運用での資産 j の 1 期間収益率の期待値とする。ここで、 $\bar{\mu}_j$, $\bar{\mu}_j'$ は次のようにして定める。資産 j の市場価格の 1 期間収益率を確率変数 μ_j とする。また、確率変数 μ_j' を

$$\mu_j' = \begin{cases} \mu_j & (\mu_j \leq 0) \\ (1 - \delta)\mu_j & (\mu_j > 0) \end{cases} \quad (12)$$

で定める。このとき、 $\bar{\mu}_j = E[\mu_j]$, $\bar{\mu}_j' = E[\mu_j']$ とする。ここで、 δ は $0 < \delta < 1$ を満たす定数である。たとえば、ポートフォリオの実効利回りを考えたい場合は、 $\delta = \xi$ (税率) とすれば良い。

従来モデルとリスク尺度を揃えることを念頭に、3 節のモデルにおいてリスク関数 f 、およびリターン制約を表す関数 g を次のように定める。

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sigma_{j,k} \rho_j \rho_k (x_j + y_j)(x_k + y_k)$$

$$g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) = - \sum_{j=1}^n (\bar{\mu}_j \rho_j x_j + \bar{\mu}_j' \rho_j y_j) - r_0 z + r_E \left(\sum_{j=1}^n \rho_j (x_j + y_j) + z \right)$$

ポートフォリオ選択については、上で定めたリスク関数・リターン制約を用いた 1 期間モデル（従来モデル、提案モデル）を 1 期ごとに繰り返し使用する方法をとる。投資期間を通して、毎回の新規投資元本は一定であるとする。両モデルのリターン制約における目標運用利回り r_E は、投資期間を通して $r_E = 0.0589$ とする⁷。

各資産の最低組入比率を表す ℓ_j , ℓ' は、

$$\ell_j = 0.05 \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad \ell' = 0.05$$

と定めた。また、本実験においては、従来モデルと提案モデルにおいて期待利回りに関する条件を揃えるため、式(12)において $\delta = 0.01 \ll 1$ とした。

以上の設定のもと、次の 6 パターンの投資期間・投資金額について実験を行い、従来モデルと提案モデルの比較を行う。いずれも 0 時点において、ポートフォリオとして資産は保有していないとする。

パターン 1. 投資期間 20 年・投資元本 2000 万円（毎年 100 万円ずつ積立）

パターン 2. 投資期間 20 年・投資元本 3500 万円（毎年 175 万円ずつ積立）

パターン 3. 投資期間 20 年・投資元本 5000 万円（毎年 250 万円ずつ積立）

パターン 4. 投資期間 40 年・投資元本 2000 万円（毎年 50 万円ずつ積立）

パターン 5. 投資期間 40 年・投資元本 3500 万円（毎年 87.5 万円ずつ積立）

パターン 6. 投資期間 40 年・投資元本 5000 万円（毎年 125 万円ずつ積立）

シミュレーション回数（シミュレーションで生成する資産価格の変動パターン数）は 1000 回とし、

⁷ 0 時点における、国内債券 25%、外国債券 25%、国内株式 25%、外国株式 20%、現金 5% で構成されるポートフォリオの 1 期間期待収益率の値を用いた。

投資パターン 1～6 において同一のセットを用いる。

4.2. 実験結果

パターン 1～6 について、1 期間モデルを繰り返し用いる方法での投資をシミュレーションした。各パターンの、従来モデルおよび提案モデルを用いた投資について、

- ・ リスク資産をすべて現金化したあとの資産総額（以下、最終投資成績という）の平均値
- ・ 支払った税の総額（以下、支払い税総額という）の平均値
- ・ 1000 回のシミュレーションのうち最終投資成績が他方のモデルより優れていた回数

をそれぞれ比較する。また、1000 回のシミュレーションについて、

- ・ 従来モデル比 = (提案モデル使用時の最終投資成績) / (従来モデル使用時の最終投資成績) の平均値

を調べる。これらの結果を、表 2～7 に示す。

また、1000 回のシミュレーションについて、

- ・ 従来モデル使用時および提案モデル使用時の最終投資成績の分布
- ・ 最終差額 = (提案モデル使用時の最終投資成績) - (従来モデル使用時の最終投資成績) の値の分布

を図 1～6 に示す。

パターン 1

表 2 パターン 1 (20 年・2000 万円) の従来モデル・提案モデルの各指標の値

	従来モデル	提案モデル
最終投資成績の平均値 (万円)	3692.1	3696.4
支払い税総額の平均値 (万円)	28.823	12.140
最終投資成績が優れていた回数 (回)	417	583
従来モデル比の平均値	-	1.0009

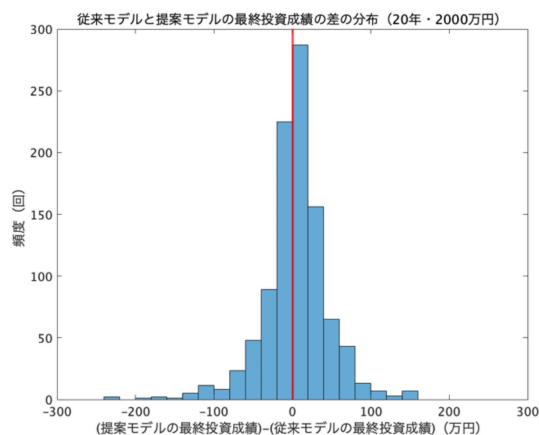
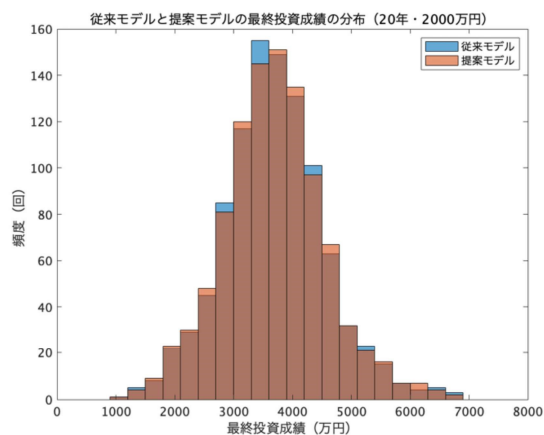


図 1 パターン 1 (20 年・2000 万円) の従来モデル・提案モデルの各指標の分布

パターン 2

表3 パターン2（20年・3500万円）の従来モデル・提案モデルの各指標の値

	従来モデル	提案モデル
最終投資成績の平均値（万円）	6356.7	6426.1
支払い税総額の平均値（万円）	147.99	64.964
最終投資成績が優れていた回数（回）	235	765
従来モデル比の平均値	-	1.0094

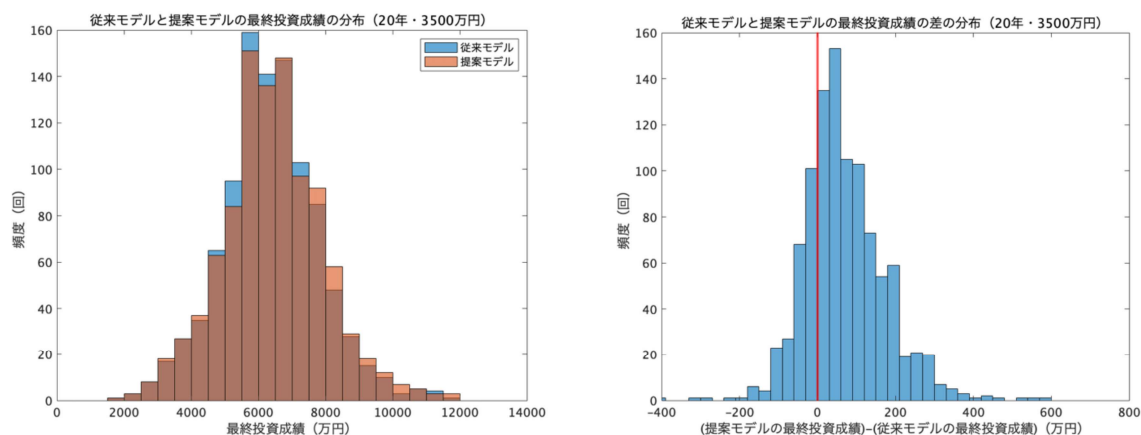


図2 パターン2（20年・3500万円）の従来モデル・提案モデルの各指標の分布

パターン 3

表4 パターン3（20年・5000万円）の従来モデル・提案モデルの各指標の値

	従来モデル	提案モデル
最終投資成績の平均値（万円）	8940.1	9121.4
支払い税総額の平均値（万円）	337.80	151.01
最終投資成績が優れていた回数（回）	175	825
従来モデル比の平均値	-	1.0175

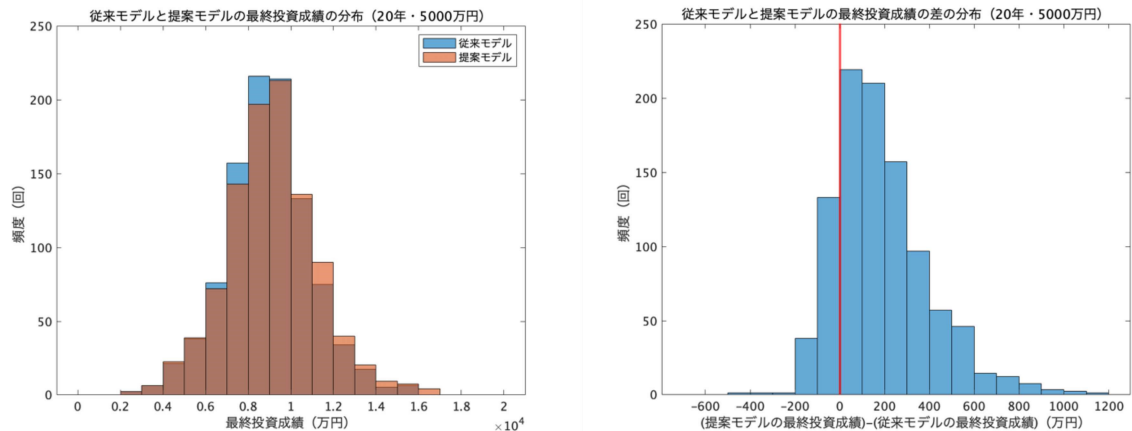


図3 パターン3 (20年・5000万円) の従来モデル・提案モデルの各指標の分布

パターン4

表5 パターン4 (40年・2000万円) の従来モデル・提案モデルの各指標の値

	従来モデル	提案モデル
最終投資成績の平均値 (万円)	7429.7	7560.1
支払い税総額の平均値 (万円)	294.27	115.59
最終投資成績が優れていた回数 (回)	250	750
従来モデル比の平均値	-	1.0159

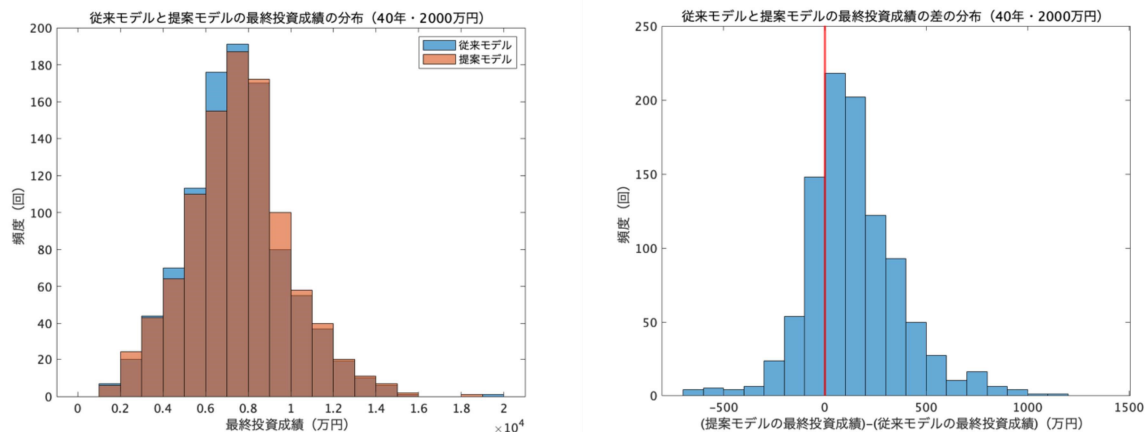


図4 パターン4 (40年・2000万円) の従来モデル・提案モデルの各指標の分布

パターン 5

表 6 パターン 5 (40 年・3500 万円) の従来モデル・提案モデルの各指標の値

	従来モデル	提案モデル
最終投資成績の平均値 (万円)	12557	13006
支払い税総額の平均値 (万円)	850.58	391.03
最終投資成績が優れていた回数 (回)	163	837
従来モデル比の平均値	-	1.0314

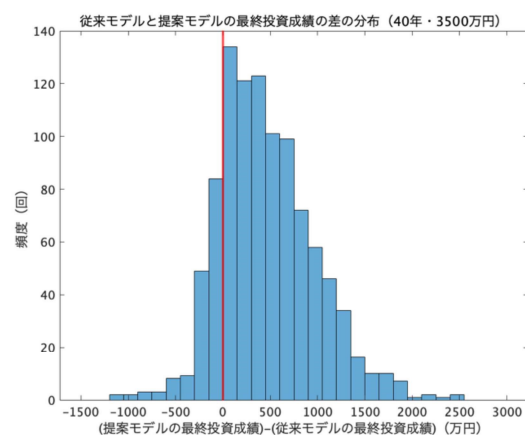
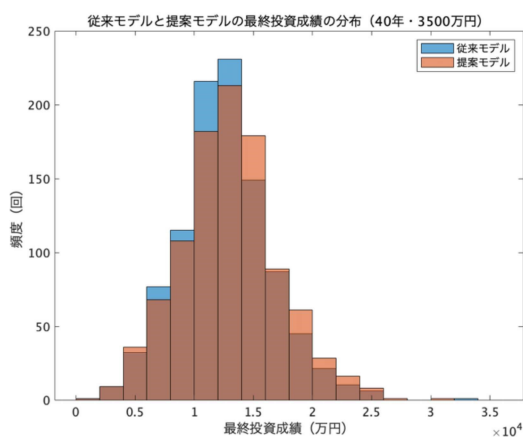


図 5 パターン 5 (40 年・3500 万円) の従来モデル・提案モデルの各指標の分布

パターン 6

表 7 パターン 6 (40 年・5000 万円) の従来モデル・提案モデルの各指標の値

	従来モデル	提案モデル
最終投資成績の平均値 (万円)	17506	18332
支払い税総額の平均値 (万円)	1509.5	751.41
最終投資成績が優れていた回数 (回)	141	859
従来モデル比の平均値	-	1.0410

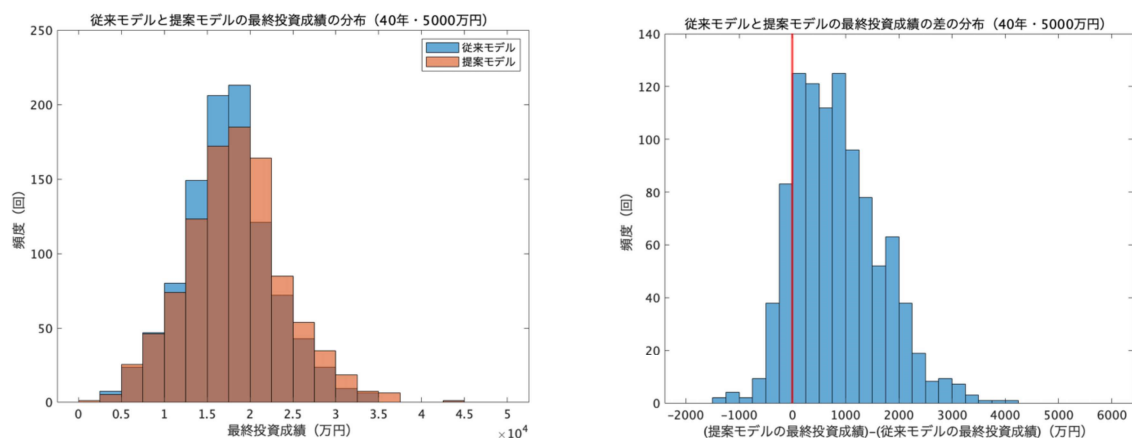


図6 パターン6 (40年・5000万円) の従来モデル・提案モデルの各指標の分布

4.3. 考察

ここでは、4.2節の実験結果について提案モデルの特性を考察する。まず、表2～7中の各指標について、パターン1～6のいずれにおいても、提案モデルの方が良い結果となった。この結果は、非課税運用と課税運用を明確に区別した最適化モデルを考えることの有用性を示しているといえる。

投資期間の長短との関係について考える。投資元本が同じであるパターン1と4、パターン2と5、パターン3と6の3組において、それぞれ比較する⁸。いずれの組においても、最終投資成績において提案モデル使用時が従来モデル使用時より優れていた回数は、投資期間が長い方（パターン4、5、6）が多かった。また、従来モデル比の平均値も、投資期間が長い方が大きな値となった。これらの結果は、提案モデルのように非課税運用と課税運用を明確に区別することは、投資期間が長くなるほど有意義であることを示している。この要因としては、

- （平均的にプラス成長のマーケットを仮定した場合）長期投資の方が、簿価に対する利益率や譲渡益の金額が大きくなりやすいこと
- 長期投資であることから、投資期間中に支払う税額の差が最終投資成績に複利的に差を与えることなどが考えられる。

投資元本の総額の大小との関係について考える。投資期間が同じであるパターン1と2と3、パターン4と5と6の2組において、それぞれ比較する。いずれの組においても、最終投資成績において提案モデル使用時が従来モデル使用時より優れていた回数は、投資元本総額が大きい方が多かった。また、従来モデル比の平均値も、投資元本総額が大きい方が大きな値となった。これらの結果は、提案モデルのように非課税運用と課税運用を明確に区別することは、投資元本総額が大きくなるほど有意義であることを示している。この要因としては、

- 特にパターン1、4など、投資元本総額が小さい場合、ほぼすべてをNISA運用とできるため提案モデルの優位性は小さい一方、投資元本総額が大きい場合、特定口座においても無視できない量

⁸ 一般に、同額の元本でも、投資期間が長いほうが長期間の資産成長が可能となるため、投資終了時点での資産額が大きくなる。したがって、最終投資成績や支払い税総額といった金額ベースの指標を直接用いた比較をすることは適切ではない。

の資産を保有することとなり、税を考慮するか（支払う税を少なくすることを目指すか）否かで生じる支払い税額の差が大きくなること

- 投資元本総額が大きい場合 NISA 総枠の使い切りが早く、特定口座での運用期間が長くなり、特定口座で生じる譲渡益の額およびそれに比例する支払い税額が複利的に大きくなること

などが考えられる。

シミュレーションにおいて、投資期間中に提案モデルでどのような投資決定が行われたのかを簡単に述べる。紙幅の都合上、詳細な時系列データの掲載は省略するが、主な傾向として、累計投資額が NISA の非課税保有限度額（1800 万円）を超過する局面では、NISA 口座内で期待リターン of の最も高い資産へ優先的に資金を配分する傾向が見られた。これは、「非課税メリットを最大化するため、期待収益率が最も高い資産のみを NISA 口座で保有する」という、投資家が直感的に抱くであろう戦略と整合する。本実験では、提案モデルの方が、支払い税総額が少なくなっていることから、上記のような戦略に、ある程度の正当性があることが示唆される。ただし、シミュレーション・パスによっては、投資期間の終盤においても NISA 口座での投資が複数の資産に分散されるケースが多く観測された。これは、単に NISA 口座内のリターンを最大化するだけでなく、ポートフォリオ全体のリスク・リターンを最適化する過程で、リバランスに伴う課税口座での税負担や、NISA の年間投資枠といった複数の制約をモデルが統合的に考慮した結果だと考えられる。

5. まとめ・今後の課題

本論文では、NISA 制度を利用する非課税運用と課税運用を区別したポートフォリオ最適化モデルを提案した。また、非課税運用と課税運用を区別する提案モデルの方が従来モデルに比べて優位であることを、1 期間モデルを用いる場合についてマーケット・シミュレーションによる数値実験（投資シミュレーション）により確認した。本論文の数値実験では、リスク関数、リターン制約は Markowitz [3] の平均・分散モデルに準ずる関数を設定した。評価指標としては、最終投資成績、支払い税総額およびこれらの統計量を用いた。実験により、本論文で提案するモデルが各指標において全般的に優位であることを示す結果を得た。特に、支払い税総額については、提案モデルの方が大幅に少ない結果となっている。これは、モデル作成の出発点である「制限付きの非課税口座を上手く使う」という目標に合致する結果であると考えている。さらに、各シミュレーション・パスでの投資決定の分析から、本提案モデルの優位性が、単純な戦略（期待収益率が最も高い資産から NISA 口座を割り当てるもの）では捉えきれないリバランス時の税コストや制度上の制約を数理的に反映し、ポートフォリオ全体として合理的な投資行動を導出できるという点にあることが示唆された。

今後の課題として、個別株式など連続値変数での取り扱いが難しいものや「成長投資枠」でのみ非課税投資を行えるものも含めて、投資対象とする資産の種類を増やすこと、リスク尺度を CVaR など異なるものにした場合について実験・検討することなどが挙げられる。本論文の数値実験では、代表的なポートフォリオ最適化モデルである平均・分散モデルを用いたが、モデル化は一般のリスク関数で行っている。特に、多様なリスク尺度（CVaR 等）の導入については、退職金を運用する投資家など、下方リスクに敏感な顧客層に向けた、より精緻な投資信託ポートフォリオの提案ツールの開発につながることが期待される。

参考文献

- [1] Bawa, V. S., & Lindenberg, E. B. (1977). Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework. *Journal of financial economics*, 5(2), 189-200.
- [2] Konno, H., Shirakawa, H., & Yamazaki, H. (1993). A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model. *Annals of Operations Research*, 45(1), 205-220.
- [3] Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- [4] Perold, A. F. (1984). Large-scale portfolio optimization. *Management science*, 30(10), 1143-1160.
- [5] Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, 2, 21-42.
- [6] Musiela, M. & Rutkowski, M. (2005). *Martingale Methods in Financial Modelling* 2nd edition. Springer.
- [7] SBI 証券. 投資信託取引ページ. <https://member.c.sbisec.co.jp/fund/search> , (参照 2025-09-17).
- [8] 金融庁. NISA を知る : NISA 特設ウェブサイト.
<https://www.fsa.go.jp/policy/nisa2/know/index.html> , (参照 2025-09-17).
- [9] 国税庁. No.1466 同一銘柄の株式等を 2 回以上にわたって購入している場合の取得費.
<https://www.nta.go.jp/taxes/shiraberu/taxanswer/shotoku/1466.htm> , (参照 2025-09-17).
- [10] 日本銀行. 預金種類別店頭表示金利の平均年利率等 (2) 銀行預金金利 (1994 年 10 月 17 日から 2007 年 9 月 24 日まで) [https://www.stat-search.boj.or.jp/ssi/cgi-bin/famecgi2?cgi=\\$nme_a000&lstSelection=IR02](https://www.stat-search.boj.or.jp/ssi/cgi-bin/famecgi2?cgi=$nme_a000&lstSelection=IR02) , (参照 2025-09-17) .
- [11] 日本銀行. 預金種類別店頭表示金利の平均年利率等 (1) 定期預金・定期積金・貯蓄預金・普通預金の平均金利 (2007 年 10 月 1 日から 2022 年 3 月 28 日まで)
[https://www.stat-search.boj.or.jp/ssi/cgi-bin/famecgi2?cgi=\\$nme_a000&lstSelection=IR02](https://www.stat-search.boj.or.jp/ssi/cgi-bin/famecgi2?cgi=$nme_a000&lstSelection=IR02) , (参照 2025-09-17).
- [12] 日本銀行. 預金種類別店頭表示金利の平均利率等 定期預金・普通預金の平均金利 (2022 年 4 月以降)
[https://www.stat-search.boj.or.jp/ssi/cgi-bin/famecgi2?cgi=\\$nme_a000&lstSelection=IR02](https://www.stat-search.boj.or.jp/ssi/cgi-bin/famecgi2?cgi=$nme_a000&lstSelection=IR02) , (参照 2025-09-17).
- [13] 枇々木規雄・田辺隆人. (2005). ポートフォリオ最適化と数理計画法. 朝倉書店.
- [14] 枇々木規雄. (2008). 家計のファイナンシャル・プランニングのための多期間最適化モデル. *ファイナンシャル・プランニング研究*, 8, 32-42.